

Séq. 8 – Les arbres binaires

Objectifs

1. Distinguer les arbres binaires
2. Parcourir un arbre de différentes façons (ordres infixe, préfixe ou suffixe ; ordre en largeur d'abord)
3. Rechercher une clé dans un arbre de recherche, insérer une clé

Cours inspiré des pages :

<https://gug.eeisti.fr/ING-1/Info%20Algorithmique/TD/td7Corrige.pdf>

<https://lyceum.fr/tq/nsi/5-algorithmique/1-algorithmes-sur-les-arbres-binaires>

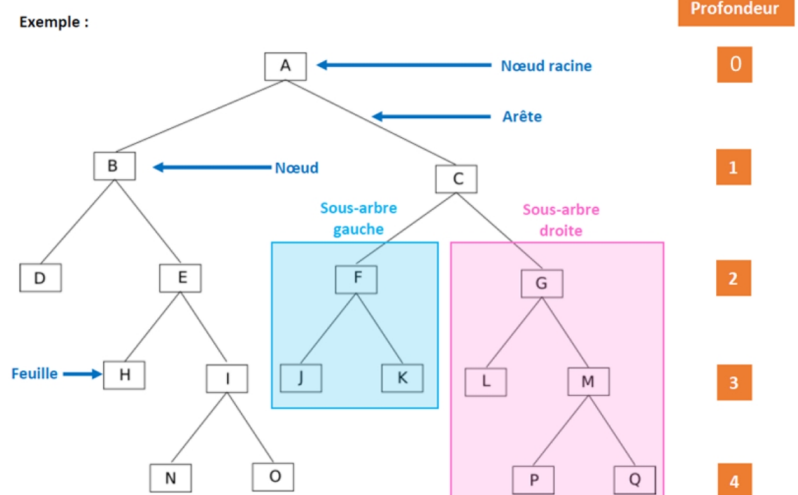
1 Définition Arbre binaire

Un arbre binaire est un arbre d'arité deux.

Un arbre binaire est :

A faire vous même 1.

En prenant pour racine le nœud A, quelle est la taille de cet arbre ? Quel est sa hauteur ? Combien de feuilles ? Combien de nœuds internes ? Quels sont les fils du nœud B ? Quelles sont les profondeurs de H, J et P ? Quelle est la racine de l'arbre gauche ? De l'arbre droit ?



2 Activités d'appropriation du vocabulaire

2.1 Dessins d'arbres binaires

A faire vous même 2.

Pour chaque description, dessinez le schéma du graphe (rappel : arbre vide est noté Δ). Précisez la taille, la hauteur et le nombre de feuilles :

- Cas1 : (1, Δ , Δ) :

- (3, (1, Δ , (4, (1, Δ , (5, Δ , Δ)), Δ)), Δ)

- Cas3 : (3, (1, (1, Δ , Δ), Δ), (4, (5, Δ , Δ), (9, Δ , Δ)))

- Cas4 : (3, (1, (1, Δ , Δ), (5, Δ , Δ)), (4, (9, Δ , Δ), (2, Δ , Δ)))

2.2 Caractéristiques d'arbres binaires (avec une racine de profondeur 0)

A faire vous même 3.

1. Combien de feuilles au minimum comporte un arbre binaire de hauteur h ? Et au maximum ?
2. Combien de nœuds au minimum comporte un arbre binaire de hauteur h ? Et au maximum ?

2.3 Squelette d'arbre binaire

Le squelette (fig.2) d'un arbre (fig.1) définit sa géométrie: on obtient ce squelette en supprimant toute information aux nœuds et en supprimant les feuilles.

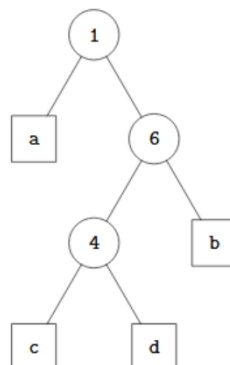


Figure 1



Figure 2 Son squelette

1. Combien y a-t-il de squelette d' arbre binaire de taille 1 ? Dessinez-les.
2. Combien y a-t-il de squelette d' arbre binaire de taille 2 ? Dessinez-les.
3. Combien y a-t-il de squelette d' arbre binaire de taille 3 ? Dessinez-les.
4. Combien y a-t-il de squelette d' arbre binaire de taille 4 ? Dessinez-les.

3 Python : Programmation objet et arbres binaires

A faire vous même 4.

1. Écrivez une classe `Noeud` (pour arbre binaire) en python.
2. Reprenez l' arbre binaire du A faire vous-même 1 et construisez-le à l' aide de cette classe.

4 Algorithmes : Calcul des taille et hauteur

Les arbres binaires étant des structures récursives, les algorithmes associés sont très souvent des algorithmes récursifs.

A faire vous même 5.

Écrivez l' algorithme de calcul de la taille d' un arbre binaire.

Proposition 1 :

- Si l'arbre est vide :
renvoyer `taille = 0`
- Sinon
renvoyer `taille=1 + la somme du nombre de nœuds des ss-arbres gauche et droit.`

Proposition 2 :

A faire vous même 6.

Écrivez l' algorithme de calcul de la hauteur d' un arbre binaire.

Proposition 1 :

- Si l' arbre est vide :
renvoyer hauteur = -1
- Sinon
renvoyer hauteur = 1 + la hauteur maximale entre ses fils.

Proposition 2 :

A faire vous même 7.

P. 132 ex 8

Prenez la description des arbres à l' aide de tuples de tuples (avec $\Delta = \text{None}$).

Écrivez un programme python qui reprend les 2 algorithmes ci-dessus pour calculer taille et hauteur.

A faire vous même 8.

Reprenez la programmation de la class `BinTree` P.124 du livre.

Recopiez la class et la méthode qui calcule la taille de l' arbre

P. 132 ex 7, écrivez un programme python qui reprend l' algorithme ci-dessus pour calculer la hauteur, le nombre de feuilles, ...

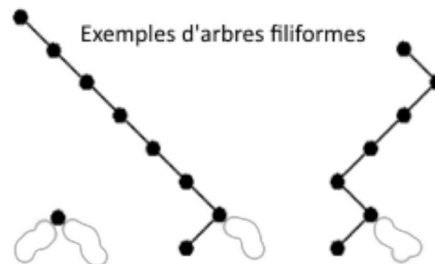
Lire P. 124-125

5 Arbres binaires particuliers

Les arbres binaires sont caractérisés par le fait que chaque nœud possède au plus deux fils.

D' autres caractéristiques sont définies, qui permettent par exemple d' identifier des arbres pour lesquels le coût de certaines opérations sera minimal, ou de définir des algorithmes spécifiques à ces arbres.

5.1 Arbre binaire filiforme



A faire vous même 9.

Écrivez l' algorithme permettant de reconnaître un arbre binaire filiforme

2^e algo :

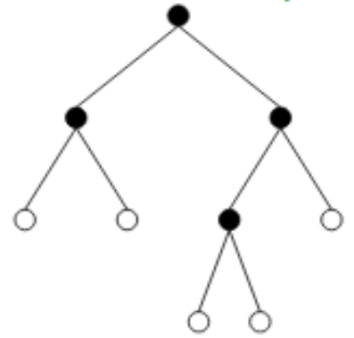
```

Fonction binaireFil2(A : ArbreBinaire) : Booléen
  Début
  Si ..... et .....
    retourner faux
  SinonSi .....
    retourner .....
  SinonSi .....
    retourner .....
  FinSi
  Sinon
    retourner .....
  Fin

```

5.2 Arbre binaire localement complet

Localement complet



A faire vous même 10.

Écrivez l'algorithme permettant de reconnaître un arbre binaire localement complet

```
Fonction localementComplet(A : ArbreBinaire) : Booléen
  Début
  Si estVide(A) Alors
    retourner vrai

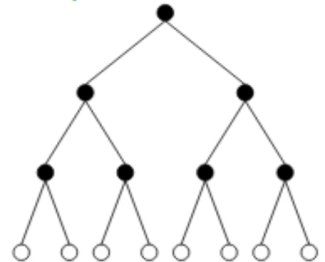
  SinonSi
    retourner vrai

  SinonSi
    retourner faux

  Sinon
    retourner
  FinSi
Fin
```

5.3 Arbre binaire complet

Complet



A faire vous même 11.

Écrivez l'algorithme permettant de reconnaître un arbre binaire complet

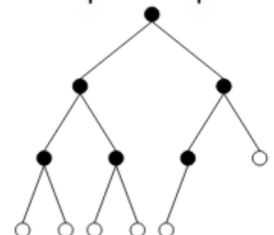
```
Fonction Complet(A : ArbreBinaire) : Booléen
  Début
  Si estVide(A)
    retourner vrai

  SinonSi
    retourner faux

  Sinon
    Retourner
  FinSi
Fin
```

5.4 Arbre binaire parfait

Parfait : "quasi complet"



A faire vous même 12.

Écrivez l'algorithme permettant de reconnaître un arbre binaire parfait

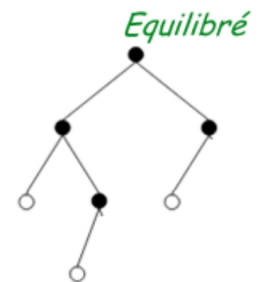
```
Fonction parfait(A : ArbreBinaire) : Booléen
Début
  Si estVide(A) Alors
    retourner vrai

  SinonSi
    retourner

  SinonSi
    retourner

  Sinon
    retourner faux
FinSi
Fin
```

5.5 Arbre binaire équilibré

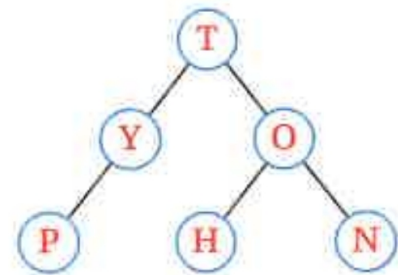


6 Parcours de l'arbre binaire

6.1 Parcours préfixe

Dans cet ordre, chaque nœud est visité puis chacun de ses fils. Voici le pseudo-code extrait de l'article Wikipedia sur les arbres.

```
parcours_préfixe(Arbre A) :
  visiter (A)
  Si nonVide (gauche(A))
    parcours_préfixe(gauche(A))
  Si nonVide (droite(A))
    parcours_préfixe(droite(A))
```



Pour l'arbre ci-dessus, le résultat est : T – Y – P – O – H – N

A faire vous même 13.

Reprenez la programmation de la class BinTree P.124 du livre.

Écrivez un programme python qui reprend l'algorithme ci-dessus pour établir la liste des nœuds lors d'un parcours préfixe de l'arbre.

6.2 Parcours infixé

On visite chaque nœud entre les nœuds de son sous-arbre de gauche et les nœuds de son sous-arbre de droite. C'est une manière assez commune de parcourir un arbre binaire de recherche, car il donne les valeurs dans l'ordre croissant. Voici le pseudo-code extrait de l'article Wikipedia sur les arbres.

```
parcours_infixe(Arbre A) :
  Si nonVide (gauche(A))
    parcours_infixe(gauche(A))
  visiter(A)
  Si nonVide (droite(A))
    parcours_infixe(droite(A))
```

Pour l'arbre ci-dessus, le résultat est : P – Y – T – H – O – N

A faire vous même 14.

Reprenez la programmation de la class BinTree P.124 du livre.

Écrivez un programme python qui reprend l'algorithme ci-dessus pour établir la liste des nœuds lors d'un parcours infixé de l'arbre.

6.3 Parcours postfixé

On affiche chaque nœud après avoir affiché chacun de ses fils.

Voici le pseudo-code extrait de l'article Wikipedia sur les arbres.

```

parcours_postfixe (Arbre A) :
  Si nonVide (gauche (A))
    parcours_postfixe (gauche (A))
  Si nonVide (droite (A))
    parcours_postfixe (droite (A))
  visiter (A)

```

Pour l' arbre ci-dessus, le résultat est : P – Y – H – N – O – T

A faire vous même 15.

Reprenez la programmation de la class BinTree P.124 du livre.

Écrivez un programme python qui reprend l' algorithme ci-dessus pour établir la liste des nœuds lors d' un parcours postfixe de l' arbre.

6.4 Parcours en largeur

On parcourt les nœuds de gauche à droite étage par étage, comme si on «lisait» l'arbre.

Voici le pseudo-code extrait de l'article Wikipedia sur les arbres.

```

parcours_largeur (Arbre A)
  f = FileVide
  enfiler (Racine (A), f)
  Tant que (f != FileVide)
    nœud = defiler (f)
    Visiter (nœud) // On fait une opération
    Si (gauche (nœud) != null) Alors
      enfiler (gauche (nœud), f)
    Si (droite (nœud) != null) Alors
      enfiler (droite (nœud), f)

```

Pour l' arbre ci-dessus, le résultat est : T – Y – O – P – H – N

A faire vous même 16.

Reprenez la programmation de la class BinTree P.124 du livre.

Écrivez un programme python qui reprend l' algorithme ci-dessus pour établir la liste des nœuds lors d' un parcours en largeur de l' arbre.

Lire P. 122-123

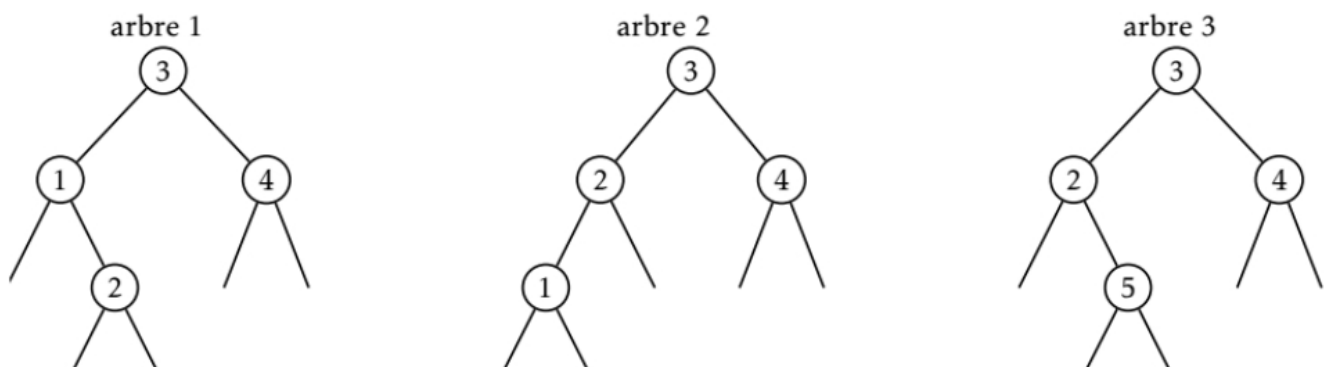
P. 130 ex 2

P. 132 ex 6

7 Utilisation des arbres binaires

7.1 Arbres binaires de recherche

7.1.1 Définition



Les arbres 1 et 2 sont bien des ABR mais pas le 3, en effet 5 est dans le sous arbre de gauche de la racine 3 ce qui est impossible !

Rq : comme l' illustrent les deux arbres de gauche, les mêmes valeurs peuvent être stockées dans plusieurs ABR différents.

7.1.2 Intérêt – Recherche d'une clé

Le caractère trié d'un arbre binaire de recherche permet des opérations rapides pour rechercher une clé.

P. 133 ex 12

7.1.3 Insertion d'une clé

```
fonction insertion(a: ABR, clé: élément)
    Si a vide
        retourner ABR(clé, vide, vide)
    Sinon
        e = étiquette de a
        Si e < clé
            retourner ABR(e, insertion(gauche(a), clé), droite(a))
        Sinon
            retourner ABR(e, gauche(a), insertion(droite(a), clé))
```

A faire vous même 17.

Reprenez la programmation de la class `BinTree` P.124 du livre.

Écrivez un prog. python qui reprend l' algorithme ci-dessus pour insérer une clé dans un arbre binaire de recherche.

7.2 Arbre représentant les expressions arithmétiques

Lire P. 127

Reproduire l' exemple donné :

P. 134 ex 14